Invarianţii în problemele de matematică

Steluţa Monea [1] & Mihai Monea [2]

REZUMAT. Acest material cu caracter introductiv se adresează elevilor din clasele V-VII care doresc să se pregătească în vederea participării la olimpiada de matematică. Materialul a fost prezentat în anul şcolar 2017-2018 la Centrul de Excelenţă Hundoara.

[1] – profesor, Colegiul Naţional DECEBAL, Deva, smmonea@yahoo.com
[2] – profesor, Colegiul Naţional DECEBAL, Deva, mihaimonea@yahoo.com

1 INTRODUCERE

În conformitate cu Dicţionarul Explicativ al Limbii Române, *invariant* reprezintă o mărime, proprietate sau relaţie care rămâne neschimbată în urma aplicării unei transformări. Acest invariant reprezintă cheia rezolvării unor probleme de matematică. Scopul acestui material este acela de a pune în evidenţă acest tip de probleme.

MOD DE APLICARE

Metoda pe care o vom detalia în continuare se mai numeşte *metoda invariantului.* Este o metodă utilă pentru toţi elevii, începând cu clasa a IV-a şi terminând cu clasa a XII-a. Ca idee de aplicare, totul porneşte de la identificarea acelei cantităţi a cărei valoare nu se modifică îndiferent de transformările care apar în enunţul problemei. De exemplu:

Problema 1. *Pe o tablă sunt scrise, la întâmplare, numerele naturale de la* 1 *la* 100. *Un elev alege la întâmplare două numere de pe tablă, le şterge şi în locul lor scrie suma acestora. Apoi repetă operaţia până când, pe tablă, rămâne un singur număr. Care este acest număr?*

Soluţie. Deoarece două numere sunt înlocuite cu suma lor, analizăm suma tuturor numerelor scrise iniţial. După ce sunt şterse primele două numere, rămân 98 dintre cele iniţiale şi al 99-lea fiind suma celor două şterse. Dar suma celor 99 numere rămase nu se modifică. Această sumă reprezintă invariantul căutat. Atunci este evidentă concluzia. La final vom obţine numărul 5050, adică $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$. □

PROBLEME REZOLVATE

În acest paragraf vom prezenta şi alte probleme rezolvate prin aceeaşi metodă.

Problema 2. *Un număr de* 99 *copii au la dispoziţie un băţ de* 1 *metru. Primul copil rupe băţul în două bucăţi, nu neapărat egale. Apoi al doilea copil alege una dintre bucăţi şi o rupe în două. Operaţia se repetă de către fiecare copil. Demonstraţi că, atunci când ultimul copil încheie joaca, printre bucăţile rămase există cel puţin una de lungime mai mică sau egală cu* 1 *cm.*

Soluţie. După prima operaţie avem 2 bucăţi, apoi 3, iar la final 100 de bucăţi. Dar suma lungimilor bucăţilor obţinute după fiecare operaţie este aceeaşi. Acesta este invariantul problemei. Atunci media aritmetică a lungimiilor este $1 : 100$, adică 1 cm. De aici deducem concluzia. □

Problema 3. *Demonstraţi că suma oricăror 2015 pătrate perfecte impare nu poate fi pătrat perfect.*

Soluţie. Partea comună a oricărui pătrat perfect impar este că se obţine restul 1 la împărţirea cu 4. Prin urmare, 2015 pătrate perfecte impare adunate dau acelaşi rest la împărţirea cu patru ca şi numărul 2015, adică 3. Prin urmare, această sumă nu poate fi pătrat perfect. □

Problema 4. *Pentru orice număr natural x, notăm cu $s(x)$ suma cifrelor sale. Definim mulţimea $A = \{x - s(x) \mid x \in \mathbb{N}^*\}$. Demonstraţi că $1234567891011 \notin A$.*

Soluţie. Ideea de rezolvare se bazează pe faptul că orice $x \in \mathbb{N}^*$ dă acelaşi rest lă împărţirea cu 9 ca şi $s(x)$, deci $x - s(x)$ este divizibil cu 9. Acesta este invariantul problemei. Dar $s(1234567891011) = 48$, deci numărul 1234567891011 nu se divide cu 9, de unde obţinem concluzia. □

Problema 5. *Fie A, mulţimea numerelor naturale formate din trei cifre consecutive, nescrise neapărat în ordine. De exemplu* 123 *şi* 312 *sunt elemente din A. Demonstraţi că oricum am alege câteva elemente ale mulţimii A, suma lor nu poate fi egală cu* 2015.

Soluţie. Se ştie că suma a trei numere consecutive este multiplu de 3. Prin urmare, orice element din A se divide cu 3, ceea ce reprezintă invariantul problemei. Atunci suma oricâtor numere din A este tot multiplu de 3, deci nu poate fi egală cu 2015. □

Problema 6. *Fie $A = \{4^n + 9^n \mid n \in \mathbb{N}, \text{impar}\}$. Demonstraţi că, oricum am alege nouă elemente din mulţimea A, suma lor nu este pătrat perfect.*

Soluţie. Numerele din mulţimea A au ultima cifră egală cu 3. Acesta este invariantul problemei. Adunănd nouă elemente din A, ultima cifră este 7, deci nu obţinem pătrat perfect. □

PROBLEME PROPUSE

Încheiem acest material cu un set de probleme, pe aceeaşi temă, pe care le propunem spre rezolvare.

Problema 7. *Pe o tablă sunt scrise la întâmplare numerele naturale $2^1, 2^2, 2^3, ..., 2^{20}$. Sunt alese la întâmplare două numere, sunt şterse şi în locul lor este scris produsul lor. Apoi se repetă operaţia până rămâne un singur număr. Demonstraţi că numărul rămas este pătrat perfect.*

Problema 8. *Fie A, mulţimea tuturor produselor de patru numere naturale consecutive. Demonstraţi că, oricum am alege câteva elemente din mulţimea A, suma lor nu poate fi egală cu* 12345678.

Problema 9. *Fie $A = \{2^n + 3^n + 7^n + 8^n \mid n \in \mathbb{N}, \text{impar}\}$. Demonstraţi că, oricare ar fi $x, y \in A$, avem $x + y \neq 200..0016$.*

Bibliografie

[1] Gologan, Linţ, Marinescu, Monea, *Matematica de Excelenţă - Clasa a V-a*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2014.

[2] Pop, Lupşor, *Matematica pentru grupele de performanţă. Exerciţii şi probleme pentru clasa a V-a*, Ed. Dacia, Cluj Napoca, 2004.

[3] ***, *Gazeta Matematică*, ediţia electronică.

[4] ***, *Revista de Matematică din Timişoara,* ediţia electronică.